МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 517.95, 519.6 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-222-230

Разработка алгоритмов построения двумерных оптимальных гранично-адаптивных сеток и их программная реализация





А. Е. Чистяков [1], **В. В. Сидорякина** [2], **С. В. Проценко** [1]

[1]ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация)

[2]Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ) (г. Таганрог, Российская Федерация)

✉ cheese_05@mail.ru

Введение. Отмечается, что использование в расчетах адаптивных сеток позволяет повысить точность и экономичность вычислительных алгоритмов, не увеличивая число узлов. Особенно эффективен такой подход при расчетах нестационарных задач. Цель данного исследования — разработка, построение и программная реализация методов построения расчетных двумерных оптимальных гранично-адаптивных сеток для областей сложной конфигурации с сохранением заданных особенностей формы и границы области. Применение таких методов способствует повышению точности, эффективности и экономичности вычислительных алгоритмов.

Материалы и методы. Рассмотрена проблема автоматического построения оптимальной гранично-адаптивной сетки в односвязной области произвольной геометрии, топологически эквивалентной прямоугольнику. Получено решение для минимального набора входной информации: заданы граница области в физической плоскости и число точек на ней. Создание алгоритма и программы построения сетки базируется на модели динамики частиц. Это позволяет определять траектории движения отдельных частиц и исследовать динамику их парного взаимодействия в рассматриваемой системе. С помощью инструмента mask отделяются внутренние и граничные узлы сетки, и это дает возможность определить скорости перемещения узлов с учетом специфики решаемой задачи.

Результаты исследования. Разработанные методы построения оптимальной гранично-адаптивной сетки области сложной геометрии дают возможность решить проблему автоматического построения сетки в двумерных областях любой конфигурации. Для оценки результатов исследования алгоритма решена тестовая задача и визуализированы этапы решения. В виде рисунков показаны расчетная область тестовой задачи и работа функции расчета скорости перемещения внутренних узлов. Визуализация подтверждает преимущество такого метода построения сетки, при котором отделяются граничные и внутренние узлы.

Обсуждение и заключения. Результаты теоретических и численных исследований важны как для изучения качественных свойств сеток, так и для развития методов построения расчетных сеток, позволяющих эффективно, с высокой точностью решать задачи численного моделирования.

Ключевые слова: метод динамики частиц, двумерная расчетная сетка, гранично-адаптивная сетка, численное моделирование.

Для цитирования: Чистяков, А. Е. Разработка алгоритмов построения двумерных оптимальных гранично-адаптивных сеток и их программная реализация / А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, С. В. Проценко // Advanced Engineering Research. — 2021. — Т. 21, № 3. — С. 222–230. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-222-230

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19−01−00701.

© Чистяков А. Е., Сидорякина В. В., Проценко С. В., 2021



http://vestnik-donstu.ru

Development of algorithms for constructing two-dimensional optimal boundary-adaptive grids and their software implementation

A. E. Chistyakov [1], **V. V. Sidoryakina** [2], **S. V. Protsenko** [1]
[1] Don State Technical University (Rostov-on-Don, Russian Federation)
[2] Taganrog Institute Named after A.P. Chekhov, Rostov State University of Economics (RINH) branch, (Taganrog, Russian Federation)
✉ cheese_05@mail.ru

Introduction. It is noted that the use of adaptive grids in calculations makes it possible to improve the accuracy and efficiency of computational algorithms without increasing the number of nodes. This approach is especially efficient when calculating nonstationary problems. The objective of this study is the development, construction and software implementation of methods for constructing computational two-dimensional optimal boundary-adaptive grids for complex configuration regions while maintaining the specified features of the shape and boundary of the region. The application of such methods contributes to improving the accuracy, efficiency, and cost-effectiveness of computational algorithms.
Materials and Methods. The problem of automatic construction of an optimal boundary-adaptive grid in a simply connected region of arbitrary geometry, topologically equivalent to a rectangle, is considered. A solution is obtained for the minimum set of input information: the boundary of the region in the physical plane and the number of points on it are given. The creation of an algorithm and a mesh generation program is based on a model of particle dynamics. This provides determining the trajectories of individual particles and studying the dynamics of their pair interaction in the system under consideration. The interior and border nodes of the grid are separated through using the mask tool, and this makes it possible to determine the speed of movement of nodes, taking into account the specifics of the problem being solved.
Results. The developed methods for constructing an optimal boundary-adaptive grid of a complex geometry region provides solving the problem on automatic grid construction in two-dimensional regions of any configuration. To evaluate the results of the algorithm research, a test problem was solved, and the solution stages were visualized. The computational domain of the test problem and the operation of the function for calculating the speed of movement of interior nodes are shown in the form of figures. Visualization confirms the advantage of this meshing method, which separates the border and interior nodes.
Discussion and Conclusions. The theoretical and numerical studies results are important both for the investigation of the grids qualitative properties and for the computational grid methods that provide solving numerical modeling problems efficiently and with high accuracy.

Keywords: particle dynamics method, computational two-dimensional grid, boundary-adaptive grid, numerical simulation.

For citation: A. E. Chistyakov, V. V. Sidoryakina, S. V. Protsenko. Development of algorithms for constructing two-dimensional optimal boundary-adaptive grids and their software implementation. Advanced Engineering Research, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 222–230. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-3-222-230

Funding information: the research is done with the financial support from RFFI (project no. 19−01−00701).

Введение. Построение сетки изначально рассматривалось как необходимый вспомогательный шаг в решении других задач [1–3]. В частности, при решении задач вычислительной гидродинамики построение расчетной сетки — весьма трудоемкий и длительный процесс [4–6]. При исследовании акваторий реальных водоемов приходится иметь дело с областями с объективно предопределенной границей, проходящей вдоль береговой линии[1]. Граничные узлы прямоугольной сетки Декартовых координат, покрывающей водоем, могут точно не попадать на контур береговой линии. Следовательно, равномерная сетка должна быть очень мелкой, чтобы были приемлемыми вносимые ею погрешности задания береговой линии. Например, для Азовского моря двумерная сетка, как правило, содержит более полумиллиона узлов [7–11]. Отметим также, что при использовании прямоугольных сеток краевые условия ставятся в точках, смещенных от реальной границы, либо (при усечении граничных ячеек сетки) вблизи границы концентрируются неоднородности, связанные с

[1]Sukhinov A. I., Sukhinov A. A. Reconstruction of 2001 ecological disaster in the Azov sea on the basis of precise hydrophysics models // Parallel Computational Fluid Dynamics, Multidisciplinary Applications, Proceedings of Parallel CFD 2004 Conference, Las Palmas de Gran Canaria, Spain. Amsterdam : Elsevier, 2005. P. 231–238. https://doi.org/10.1016/B978-044452024-1/50030-0

неравномерностью шагов по пространственным направлениям[2]. Учитывая сказанное, а также необходимость упрощения структур данных и алгоритмов их обработки, численное моделирование указанного типа задач целесообразно проводить на оптимальной гранично-адаптивной сетке [12–14].

В настоящей статье представлены алгоритм и программа, разработанные для построения четырехугольных оптимальных гранично-адаптивных расчетных сеток на основе метода динамики частиц в двумерной постановке. Этот мощный вычислительный метод позволяет представить узлы сетки как заряженные частицы и моделировать динамику системы, состоящей из огромного числа частиц (до миллиона). На примере тестовых задач демонстрируется эффективность работы алгоритма для областей со сложной границей.

Материалы и методы. Описание метода построения 2D оптимальной гранично-адаптивной сетки. В Декартовой системе координат Oxy введем область D. В области D строится сетка $\omega=\left\{\left(x_{i,j},y_{i,j}\right),\ i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}\right\}$ по заданным координатам граничных узлов. Сеточная область разделяет область D на элементарные подобласти в виде четырехугольников. Узлы сетки перераспределяются вдоль координатных линий. Затем в нужных зонах, где требуется сгущение узлов, переменные x,y заменяются на сжимающие переменные ξ,η с помощью разделенных преобразований:

$$(\xi,\eta)\to(x,y):\ x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta), \quad (1)$$

$$(x,y)\to(\xi,\eta):\ \xi=\xi(x,y),\ \eta=\eta(x,y). \quad (2)$$

Таким образом, на плоскости (ξ,η) строится сетка $\omega=\left\{\left(\xi_{i,j},\eta_{i,j}\right),\ i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}\right\}$, которая определяется функциями $x=x(\xi,\eta),\ y=y(\xi,\eta)$.

Построение расчетной сетки ω базируется на методе динамики частиц. Такая техника моделирования широко представлена в литературе, поэтому мы остановимся на ней лишь вкратце [15–17].

Узлы сетки ω представляем совокупностью частиц с зарядами q_{ij} и массой m_{ij}, которые перемещаются в расчетной области D вдоль и вблизи ее границы. Частицы взаимодействуют друг с другом, причем силы взаимодействия имеют электрическую природу.

На отдельно взятую *i*-ю частицу со стороны *j*-й частицы по закону Кулона действует отталкивающая сила $\vec{F}_{ij}$. Абсолютная величина силы $\vec{F}_{ij}$ определяется расстоянием между данными частицами, а ее вектор направлен противоположно радиус-вектору $\vec{r}_{ij}$, соединяющему *i*-й и *j*-й заряды (рис. 1).

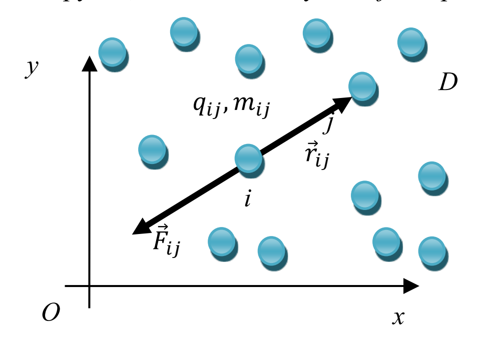


Рис. 1. Схема взаимодействия частиц

Траектории движения заряженных частиц определяют расположение узлов сетки. Обозначим координаты *i*-й частицы $\left(x_{ij},y_{ij}\right)$, а *j*-й — $\left(\xi_{ij},\eta_{ij}\right)$. Длина радиус-вектора $\vec{r}_{ij}$, определяющего перемещение узла $\left(x_{ij},y_{ij}\right)$ к узлу $\left(\xi_{ij},\eta_{ij}\right)$, рассчитывается по формуле:

$$r_{ij}=r\left(x_{ij},y_{ij},\xi_{ij},\eta_{ij}\right)=\sqrt{\left(x_{ij}-\xi_{ij}\right)^2+\left(y_{ij}-\eta_{ij}\right)^2}. \quad (3)$$

[2]Sukhinov A., Chistyakov A., Sidoryakina V. Investigation of nonlinear 2D bottom transportation dynamics in coastal zone on optimal curvilinear boundary adaptive grids // Dynamic of Technical Systems: Proc. of XIII Intern. scient.-tech. conf. Rostov-on-Don, 2017. 132. 04003. https://doi.org/10.1051/matecconf/201713204003

http://vestnik-donstu.ru

Отметим особенность преобразования (1)–(2). Если расстояние $r \neq 0$, то узел (ξ_{ij}, η_{ij}) отталкивается от каждого из соседних. Они в свою очередь должны либо встать на предписанное расстояние, либо отодвинуться, притянувшись к соседнему узлу и освободив место для вновь вставляемого.

Вид преобразования (1)–(2), сжимающего координаты x, y в зонах больших градиентов, определяется решением задачи. С этой целью в направлении осей Ox, Oy используется модельное уравнение, описывающее потенциал:

$$F(x_{ij}, y_{ij}, \xi_{ij}, \eta_{ij}) = \frac{l}{r(x_{ij}, y_{ij}, \xi_{ij}, \eta_{ij})^{\alpha}}, \qquad (4)$$

где l — коэффициент пропорциональности между потенциалом и расстоянием r в заданном узле, α — некоторый параметр.

Каждый узел стремится к снижению потенциальной энергии, а именно:

$$\sum_{m,n} F(x_{ij}, y_{ij}, x_{nm}, y_{nm}) \to min,\ i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2},\ n = \overline{1, N_1},\ m = \overline{1, N_2}. \qquad (5)$$

Сила $\vec{f}(x_{ij}, y_{ij})$ связана с потенциалом $F = F(x_{ij}, y_{ij}, \xi_{ij}, \eta_{ij})$ следующим соотношением:

$$\vec{f}(x_{ij}, y_{ij}) = grad(F) = -\sum_{m,n} \frac{\alpha l}{r(x_{ij}, y_{ij}, x_{nm}, y_{nm})^{\alpha+2}} \vec{r}. \qquad (6)$$

При моделировании процесса взаимодействия подвижных частиц предполагаем, что узлы сетки, попавшие за пределы расчетной области, вынуждены переместиться в точку на границе области, расстояние до которой минимально. Схема взаимодействия между подвижной частицей и частицей на границе показана на рис. 2.

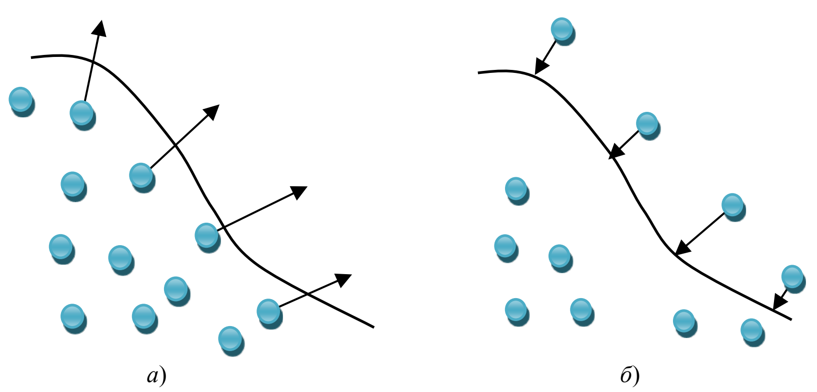


Рис. 2. Схема взаимодействия частиц на границе расчетной области D : направление движения частиц внутри области D (*а*); направление движения частиц за пределами области D (*б*)

Технология численного интегрирования уравнений движения базируется на алгоритме, представленном в [17].

Описание программного средства для расчета сетки. Программа состоит из модулей, реализующих пять функций: управляющую, вызывающую расчетные функции заданное количество раз; три расчетные функции и функцию визуализации. Расчетные: функция, описывающая скорость перемещения узлов; функция перемещения узлов; функция проверки выхода узлов за границу области.

Структура данных программы: A — входной массив размерами $[N, M]$; C — массив визуализации; B_x, B_y — массивы размерами $[n, m]$, описывающие расположение узлов; B_m — массив размерами $[n, m]$, описывающий маски граничных условий; u, v — компоненты вектора скорости перемещения узлов; i, j — счетчики; n, m — количество узлов по направлениям Ox, Oy соответственно; l — коэффициент пропорциональности между потенциалом и расстоянием r в заданном узле; α — некоторый параметр (степень при r). Управляющая функция обнуляет массивы и задает начальное расположение узлов.

Алгоритм, описывающий функцию скорости перемещения узлов.

Входные массивы: B_x, B_y, B_m и параметр α (например, $\alpha = 3$). Выходные: u, v.

1. Начало цикла по переменным i, j. Значения счетчиков задаются равными $i = 0,...,n-1,\ j = 0,...,m-1$.

2. Отделение граничных и внутренних точек расчетной области. Если mask = 1 — точка на границе области, переход на п. 3, если mask = 2 — точка внутри области, переход на п. 4.

3. Алгоритм, описывающий функцию скорости перемещения граничных узлов

3.1. Обнуление массивов $u,\ v$.

3.2. Начало цикла по переменным $i1,\ j1$. Значения счетчиков задаются равными $i1 = i-2,...,i+2,\ \ j1 = j-2,..., j+2.$

3.3. Расчет расстояния от одного узла до другого:

$$r \leftarrow \sqrt{\left(Bx_{i,j} - Bx_{i1,j1}\right)^2 + \left(By_{i,j} - By_{i1,j1}\right)^2}.$$

3.4. Проверка условия. Если $r > 0$, то переход к п. 3.5, иначе переход к п. 3.6.

3.5. Расчет $u,\ v$ для $\alpha = 3$:

$$u_{i,j} \leftarrow u_{i,j} + \frac{\left(Bx_{i,j} - Bx_{i1,j1}\right)}{r^\alpha} Bm_{i1,j1},$$

$$v_{i,j} \leftarrow v_{i,j} + \frac{\left(By_{i,j} - By_{i1,j1}\right)}{r^\alpha} Bm_{i1,j1}.$$

3.6. Наращивание счетчиков $i1,\ j1$ и переход к п. 3.3.

3.7. Наращивание счетчиков $i,\ j$ и переход к п. 3.1.

4. Алгоритм, описывающий функцию скорости перемещения внутренних узлов

4.1. Обнуление массивов $u,\ v$.

4.2. Начало цикла по переменным $i1,\ j1$. Значения счетчиков задаются равными $i1 = i-1,...,i+1,\ \ j1 = j-1,..., j+1$.

4.3. Проверка условия. Если $(i1-i)(j1-j) = 0$, то переход к п. 4.4, иначе переход к п. 4.8.

4.4. Расчет расстояния от одного узла до другого:

$$r \leftarrow \sqrt{\left(Bx_{i,j} - Bx_{i1,j1}\right)^2 + \left(By_{i,j} - By_{i1,j1}\right)^2}.$$

4.5. Проверка условия. Если выполняется $r > 0$, то переход к п. 4.6, иначе переход к п. 4.7.

4.6. Расчет $u,\ v$ для $k = 0{,}005$:

$$u_{i,j} \leftarrow u_{i,j} - k\left(Bx_{i,j} - Bx_{i1,j1}\right),$$

$$v_{i,j} \leftarrow v_{i,j} - k\left(By_{i,j} - By_{i1,j1}\right).$$

4.7. Наращивание счетчиков $i1,\ j1$ и переход к п. 4.4.

4.8. Наращивание счетчиков $i,\ j$ и переход к п. 4.1.

Алгоритм, описывающий функцию расчета перемещения узлов.

Входные массивы: $B_x,\ B_y,\ u,\ v$ и параметр l (например, $l = 30$). Выходные массивы: $B_x,\ B_y$.

1. Начало цикла по переменным $i,\ j$. Значения счетчиков задаются равными $i = 1,...,n-2,\ \ j = 1,...,m-2.$

2. Расчет массивов $B_x,\ B_y$:

$$Bx_{i,j} \leftarrow Bx_{i,j} + lu_{i,j},$$

$$By_{i,j} \leftarrow By_{i,j} + lv_{i,j}.$$

3. Наращивание счетчиков $i,\ j$ и переход к п. 2.

Алгоритм, описывающий функцию проверки выхода узлов за границу области.

Входные массивы: $B_x,\ B_y,\ A$ и параметр d (например, $d = 3$), описывающий размеры окна, в котором представлена расчетная область в случае выхода узла $B_x,\ B_y$ за границу расчетной области. Выходные массивы: $B_x,\ B_y$.

1. Начало цикла по переменным $i,\ j$. Значения счетчиков задаются равными $i = 1,...,n-2,\ \ j = 1,...,m-2.$

2. Нахождение индексов в массиве A, соответствующих узлу $\left(Bx_{i,j}, By_{i,j}\right)$:

$$i1 \leftarrow \left|Bx_{i,j}\right|, \quad j1 \leftarrow \left|By_{i,j}\right|.$$

3. Начальное значение расстояния до границы задается значением параметра d :

$$r \leftarrow 2d.$$

4. Проверка условия выхода точки $(i1, j1)$ за границу расчетной области: если выполняется $A_{i1,j1} > 0$, иначе переход в п. 12.

5. Начало цикла по переменным $i2,\ j2$. Значения счетчиков задаются равными $i2 = -d,...,d,\ j2 = -d,...,d$.

6. Проверка точки $(i2 + i1, j2 + j1)$ на принадлежность расчетной области: если выполняется $A_{i2+i1,j2+j1} = 0$, иначе переход в п. 10.

7. Расстояние от узла $\left(Bx_{i,j},\ By_{i,j}\right)$ до точки $(i2 + i1, j2 + j1)$ находится по формуле:

$$r1 \leftarrow \sqrt{\left(Bx_{i,j} - i2 - i1\right)^2 + \left(By_{i,j} - j2 - j1\right)^2}.$$

8. Если $r1 > r$, выполняется п. 9, иначе переход к п. 10.

9. Запоминаем точку расчетной области, ближайшую к узлу $\left(Bx_{i,j},\ By_{i,j}\right)$:

$$r \leftarrow r1, \quad i3 \leftarrow i2 + i1, \quad j3 \leftarrow j2 + j1.$$

10. Наращивание счетчиков по переменным $i2, j2$ и возврат к п. 6.

11. Смещение узла $\left(Bx_{i,j},\ By_{i,j}\right)$ на границу расчетной области:

$$Bx_{i,j} \leftarrow i3, \quad By_{i,j} \leftarrow j3.$$

12. Наращивание счетчиков $i,\ j$ и переход к п. 2.

Алгоритм, описывающий функцию визуализации.

Входные массивы: $B_x,\ B_y,\ A$. Выходной массив — С.

1. В массив визуализации помещаем массив A.

2. Начало цикла по переменным $i,\ j,\ k$. Значения счетчиков задаются равными $i = 1,...,n-3,\ j = 1,...,m-2$, $k = \left|Bx_{i,j}\right| ... \left|Bx_{i+1,j}\right|$.

3. Наносим вертикальные линии:

$$C\left[k, \left|By_{i,j} + \frac{By_{i+1,j} - By_{i,j}}{Bx_{i+1,j} - Bx_{i,j}} \cdot \left(k - Bx_{i,j}\right)\right|\right] \leftarrow 255.$$

4. Наращивание счетчиков $i,\ j,\ k$ и переход к п. 3.

5. Начало цикла по переменным $i,\ j,\ k$. Значения счетчиков задаются равными $i = 1,...,n-2,\ j = 1,...,m-3$, $k = \left|By_{i,j}\right| ... \left|By_{i,j+1}\right|$.

6. Наносим горизонтальные линии

$$C\left[k, \left|By_{i,j} + \frac{By_{i+1,j} - By_{i,j}}{Bx_{i+1,j} - Bx_{i,j}} \cdot \left(k - Bx_{i,j}\right)\right|\right] \leftarrow 255.$$

7. Наращивание счетчиков $i,\ j,\ k$ и переход к п. 6.

Входной файл — BMP. На нем черным цветом обозначена геометрия области, на которой строится сетка. Остальная область обозначена белым цветом. Исходный файл BMP записывается в массив, при этом черный цвет соответствует значениям 0, а белый — 255. К выходной информации относятся массивы $B_x,\ B_y$, описывающие расположение узлов сетки, и массив C, в котором хранится геометрия исходной области с нанесенной сеткой.

Результаты исследования. Результаты работы алгоритма демонстрирует решение тестовой задачи.

Входные данные: исходная область вида, представленного на рис. 3, а также расчетные данные $n = 12,\ m = 14,\ i = 1,...,10,\ j = 1,...,12,\ l = 30,\ d = 3,\ \alpha = 3.$

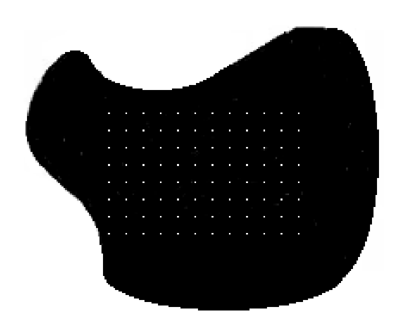


Рис. 3. Расчетная область тестовой задачи

За начальное расположение узлов принимается расположение узлов сетки ω без адаптации к границе исходной области. Визуализация работы функции перемещения внутренних узлов представлена на рис. 4.

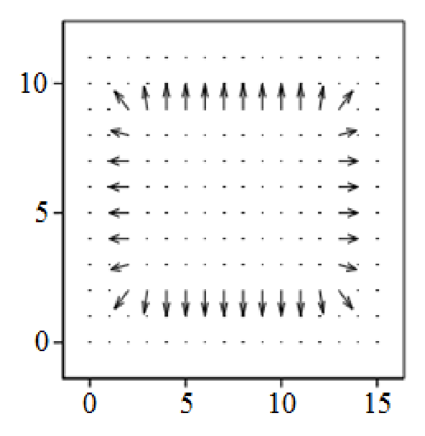


Рис. 4. Работа функции расчета скорости перемещения внутренних узлов

Результат построения четырехугольной гранично-адаптивной сетки ω, покрывающей исходную область, получен на основе представленного алгоритма (рис. 5 *а*). Рис. 5 *б* показывает работу алгоритма программы для случая, когда не отделялись граничные и внутренние узлы. Явное преимущество сетки, представленной на рис. 5 *а*, состоит в том, что ее ячейки — выпуклые четырехугольники. Для сетки вида 5 *б* данное требование не выполняется.

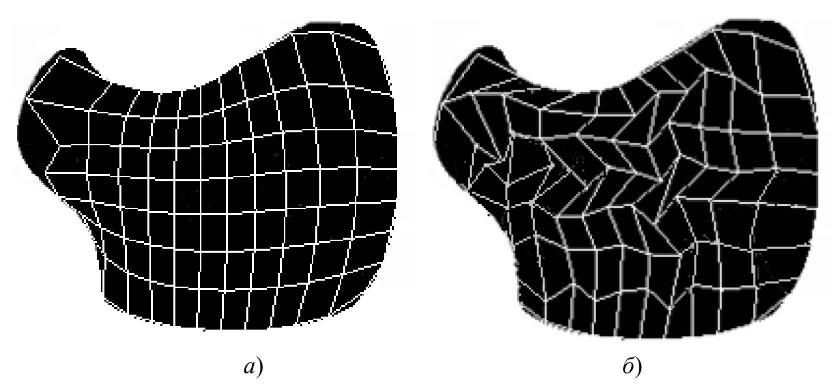


Рис. 5. Результаты работы алгоритма построения сетки ω : изображение сетки ω , построенной при отделении граничных и внутренних узлов сетки (*а*); изображение сетки ω , построенной без отделения граничных и внутренних узлов сетки ω (*б*)

Обсуждение и заключения. Предложена технология построения двумерных оптимальных гранично-адаптивных сеток, базирующаяся на методе динамики частиц. Разработан и опробован алгоритм численного расчета четырехугольных сеток для областей сложной конфигурации с сохранением заданных геометрических особенностей формы области и ее границы. На примере тестовой задачи исследовались возможности предлагаемого алгоритма. Одно из преимуществ данной программной реализации — возможность автоматически расставлять узлы на границе расчетной области и получать выпуклые ячейки. Представленный подход обладает достаточной универсальностью и надежностью и может быть использован при триангуляции рассматриваемых областей.

Библиографический список

1. Downing-Kunz, M. A. Tidal Asymmetry in Ocean-Boundary Flux and In-Estuary Trapping of Suspended Sediment Following Watershed Storms: San Francisco Estuary, California, USA / M. A. Downing-Kunz, P. A. Work, D. H. Schoellhamer // Estuaries and Coasts. — 2021. https://doi.org/10.1007/s12237-021-00929-y (accessed: 31.08.2021).

2. Modelled transport of benthic marine microplastic pollution in the Nazaré Canyon / A. Ballent, S. Pando, A. Purser [et al.] // Biogeosciences. — 2013. — Vol. 10 (12). — P. 7957–7970. https://doi.org/10.5194/bg-10-7957-2013

3. Kirk, B. Nested grid iteration for incompressible viscous flow and transport / B. Kirk, K. Lipnikov, G. F. Carey // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2003. — Vol. 17 (4). — P. 253–262. https://doi.org/10.1080/1061856031000173635

4. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China / Xiaoying Liu, Shi Qi, Yuan Huang [et al.] // International Journal of Sediment Research. — 2015. — Vol. 30 (3). — P. 250–255. https://doi.org/10.1016/j.ijsrc.2015.03.013

5. A multi-discipline approach for understanding sediment transport and geomorphic evolution in an estuarine-coastal system: San Francisco Bay / P. L. Barnard, B. E. Jaffe, D. H. Schoellhamer, L. J. McKee // Marine Geology. — 2013. — Vol. 345. — P. 1–326. https://doi.org/10.1016/j.margeo.2013.09.010

6. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon / E. Alekseenko, B. Roux, A. Sukhinov [et al.] // Computers & Fluids. — 2013. — Vol. 77. — P. 24–35. https://doi.10.5194/npg-20-189-2013

7. Сухинов, А. И. Прецизионные модели гидродинамики и опыт их применения в предсказании и реконструкции чрезвычайных ситуаций в Азовском море / А. И. Сухинов // Известия ТРТУ. — 2006. — Т. 3, № 58. — С. 228–235.

8. Сухинов, А. И. Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина // Вестник Донского государственного технического университета. — 2018. — Т. 18, № 4. — С. 350–361. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361

9. Sidoryakina, V. V. Well-posedness analysis and numerical implementation of a linearized two-dimensional bottom sediment transport problem / V. V. Sidoryakina, A. I. Sukhinov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57 (6). — P. 978–994. https://doi.org/10.1134/S0965542517060124

10. Сухинов, А. И. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина, А. А. Сухинов // Вестник Донского государственного технического университета. — 2017. — Т. 17, № 1. — С. 5–17. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17

11. Сухинов, А. И. Прецизионные двумерные модели мелких водоемов / А. И. Сухинов, В. С. Васильев // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 10. — Р. 17–34.

12. Some aspects of adaptive grid technology related to boundary and interior layers / G. F. Carey, M. Anderson, B. Carnes, B. Kirk // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2004. — Vol. 166 (1). — P. 55–86. https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.036

13. Owen, S. J. A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology / S. J. Owen // In: Proc.7th Int. Meshing Roundtable. — Dearborn, MI; 1998. — P. 239–269.

14. Сковпень, А. В. Усовершенствованный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток / А. В. Сковпень // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 8. — С. 1506–1528.

15. Кривцов, А. М. Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела / А. М. Кривцов, Н. В. Кривцова // Дальневосточный математический журнал ДВО РАН. — 2002. — Т. 3, № 2. — С. 254–276.

16. Белкин, А. А. Об одной модификации метода молекулярной динамики / А. А. Белкин // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2006. — Т. 9, № 4. — С. 27–32.

17. Железнякова, А. Л. Построение двумерных неструктурированных сеток методом молекулярной динамики / А. Л. Железнякова, С. Т. Суржиков // chemphys.edu.ru : [сайт]. — 2011. — Т. 11. — URL: http://chemphys.edu.ru/issues/2011-11/articles/192/ (дата обращения: 31.08.2021).

Поступила в редакцию 28.06.2021
Поступила после рецензирования 19.07.2021
Принята к публикации 19.07.2021

Об авторах:

Чистяков Александр Евгеньевич, профессор кафедры «Математика и информатика» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, профессор, ResearcherID: O-1507-2016, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8323-6005, cheese_05@mail.ru

Сидорякина Валентина Владимировна, заведующая кафедрой «Математика» Таганрогского института имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ) (347936, РФ, г. Таганрог, ул. Инициативная, 48), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7744-015X, cvv9@mail.ru

Проценко Софья Владимировна, аспирант кафедры «Математика и информатика», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9656-8466, rab55555@rambler.ru.

Заявленный вклад соавторов:

А. Е. Чистяков — научное руководство, разработка программы расчета, анализ результатов исследований. В. В. Сидорякина — формирование основной концепции, постановка цели и задач исследования, проведение вычислительного эксперимента, подготовка текста. С. В. Проценко — подготовка текста, формулирование выводов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.